مبرهنة :

لتكن G زمرة دوارة مولدها a أي أن $G = \langle a \rangle$ فإن :

① $\langle a \rangle$ منتهية إذا وفقط إذا وجد عددان طبيعيان r ، s $(r < s)$ بحيث $a^r = a^s$

② إذا كانت $G = \langle a \rangle$ منتهية فإنه تتألف (تكون أي عنصرين) من نفس المرتبة (+++)

البرهان :

① لنفرض أنه يوجد عددين طبيعيين r ، s $(r < s)$ بحيث أن $a^r = a^s$ و لنبرهن أن $\langle a \rangle$ منتهية.

نفرض s أصغر عدد صحيح يحقق الشرط $a^r = a^s$ ولتكن m ... تساوي قوة أخرى لـ a ، أي a^0 ... فإن

$a , a^2 , a^3 , \ldots , a^{s-1}$

جميعها متمايزة و r هو العدد الصحيح الموجب الوحيد الأصغر من s الذي يحقق الشرط $a^r = a^s$ ولنفرض أن $s = m + r$ فيكون $a^{m+r} = a^s = a^r$ وبالتالي ومن أجل العدد الصحيح الموجب k فإن

$a^{km+r} = a^r$ (وذلك لأن $a^{m+r} = a^r$) وبضرب الطرفين بـ a^m

ينتج $a^{2m+r} = a^{m+r} = a^r$ مرة أخرى بضرب الطرفين بـ a^m ينتج $a^{3m+r} = a^r$

ونفيد التكرار ($k-1$ مرة) $a^{3m+r} = a^{m+r} = a^r$

ويمكن $n \in N$ بحيث أن $n \geq N$ بأنه يوجد عددان صحيحان موجبان u و λ بحيث أن $n - s = \lambda m + u$ حيث $\lambda \geq 0$ ، $m > u \geq 0$ (من نظرية القسمة)

تعويض s بقيمتها نجد $n - m - r = \lambda m + u \Leftarrow n = (\lambda+1)m + r + u$

وبالتالي إذا كانت $n \geq 1$ فإن

$a^n = a^{(\lambda+1)m+r} \, a^u = a^r \, a^u$ حسب الخاصة $a^{km+r} = a^r$

ويكون $s = r + m > r + u$ أي أنه وجدنا من أجل $n \geq s$ كل صحيح موجب $r + u$ حيث $r + u < s$ و $a^n = a^{r+u}$ وبالتالي فإن عناصر الزمرة الدوارة $G = \langle a \rangle$ تكون منتهية ومن المرتبة $m + r - 1$

العكس :

نفرض أن $G = \langle a \rangle = \{ a , a^2 , \ldots , a^{n-1} \}$ فإن $G = \langle a \rangle$ منتهية و $a^n \in \langle a \rangle$ حسب التعريف

وبالتالي يوجد عنصر مثل $n < m$ بحيث يكون $\bar{a}^{m} = \bar{a}^{n}$

(2) إذا كانت $G = <a>$ غير منتهية نعرف التطبيق $h : <a> \longrightarrow N$; $\bar{a}^{n} \longrightarrow n$

حيث أن $(N, +)$ بعض زمرة الأعداد الطبيعية مع الجمع العادي

نبرهن أن h متقابل :

$\forall\ \bar{a}^{n}, \bar{a}^{m} \in <a>$; $h(\bar{a}^{n}) = h(\bar{a}^{m})$

وبالتالي حسب التعريف $n = m \Leftarrow$ h متباين

من أجل كل $n \in N$ فإن $\bar{a}^{n} \in <a>$ وأن $h(\bar{a}^{n}) = n$ أي أن h غامر وبالتالي هو متقابل

$h(\bar{a}^{n} \bar{a}^{m}) = h(\bar{a}^{n+m}) = n + m = h(\bar{a}^{n}) + h(\bar{a}^{m})$

وبالتالي فإن h إيزومورفيزم أي أن $<a> \simeq N$

نتائج:

1. جميع أنواع الزمر الدوارة غير المنتهية تكون إيزومورفية فيما بينها
2. إذا كانت في $<a>$ لو قوتين مختلفتين الأس غير متساويتين فإن $<a>$ غير منتهية والعكس بالعكس
3. بعض الزمر الدوارة غير المنتهية لا تحوي عناصر جميلة

تعريف :

إذا كانت S بعض زمرة دوارة منتهية مولدها a من الشكل

$S = \{a, \bar{a}^{2}, \ldots, \bar{a}^{n}, \ldots, \bar{a}^{n+m-1}\}$

حيث $\bar{a}^{n+m} = \bar{a}^{n}$ فإن n يدعى دليل a بينما m يدعى دور a

ملاحظة :

نلاحظ أن الدليل + الدور = المرتبة + 1

تمرين :

1. أثبت أنه مهما كانت r, m من N فإنه يوجد بعض زمرة دوارة منتهية دليلها r

② أثبت أنه يوجد زمرتين دوارتين منتهيتين تتماثلان إذا وفقط إذا كان لهما نفس الدليل ونفس الدور.

الحل:

[1] لنأخذ $S = \{1, 2, \ldots, r, \ldots, r+m-1\}$ ولنعرف عليها عملية الشكل الداخلي

$$x+y = \begin{cases} x+y & \text{if } x+y < r+m \\ x+y-km & \text{if } x+y \geq r+m \end{cases} \quad \forall x, y \in S$$

ولتكن $T = \langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^r, \ldots, a^{r+m-1}\}$

حيث $a^{m+r} = a^r$

ولنبرهن أن $S \cong T$ لنعرف التطبيق

$$f : S \to T$$

$$n \to a^n$$

$$f(x+y) = \begin{cases} f(x+y) & \text{if } x+y < r+m \\ f(x+y-km) & \text{if } x+y \geq r+m \end{cases}$$

$$f(x+y) = \begin{cases} a^{x+y} & \text{if } x+y < r+m \\ a^{x+y-km} & \text{if } x+y \geq r+m \end{cases}$$

$$f(x+y) = \begin{cases} a^x a^y & \text{if } x+y < r+m \\ \underbrace{a^x a^y a^{-km} a^r}_{a^{km+r}} & \text{if } x+y \geq r+m \end{cases}$$

$$f(x+y) = \begin{cases} a^x a^y & \text{if } x+y < m+r \\ \dfrac{a^x a^y a^r}{a^r} & \text{if } x+y \geq m+r \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x*y) = \begin{cases} f(x)\,f(y) & \text{if } x+y < m+r \\ f(x)\,f(y) & \text{if } x+y \geq m+r \end{cases}$$

اي انه في جميع الحالات فان $f(x*y) = f(x)\,f(y)$ اي ان f هو مورفيزم

ومن طريقة بناء f نستنتج انه تقابل وبالتالي فهو ايزومورفيزم

اي ان S تكون نصف زمرة دوارة دليلها r ودورها m

(2) لتكن ⟨a⟩ و ⟨b⟩ نصفا زمرتين دوارتين لهما نفس الدليل r والدور m

ماذا عرفنا

$$\psi : \langle a\rangle \longrightarrow \langle b\rangle$$
$$a^s \longrightarrow b^s$$

فان ψ تقابل وكذلك هو مورفيزم لان

$$\psi(a^s a^k) = \psi(a^{s+k}) = b^{s+k} = b^s b^k = \psi(a^s)\,\psi(a^k)$$

وبالتالي هو ايزومورفيزم

العكس:

لنفرض ان ⟨a⟩ و ⟨b⟩ نصفا زمرتين دوارتين متشاكلتين وبالتالي يوجد بينهما ايزومورفيزم وليكن ψ ولنفرض ان ⟨a⟩ نصف زمرة دوارة دليلها r ودورها m عندئذ

$$a^{m+r} = a^r$$

$$b^{m+r} = \psi(a^{m+r}) = \psi(a^r) = b^r$$

وبالتالي فان ⟨b⟩ لها الدليل r والدور m